محاسبه بعد فرکتال در مسائل با ابعاد بالا

دکتر مجید وفایی جهان
استادیار-دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

پائیز ۱۳۹۲

تهیه شده:حسن صفری نادری

موضوعات مورد بحث

- معرفی و کاربرد بعد فرکتال
- روش محاسبه بعد فرکتال
- مولد اعداد تصادفی
- آزمون بعد فرکتال
- پیچیدگی مکانی و ارائه راهکار
- ارزیابی روش ارائه شده
- نتیجه گیری

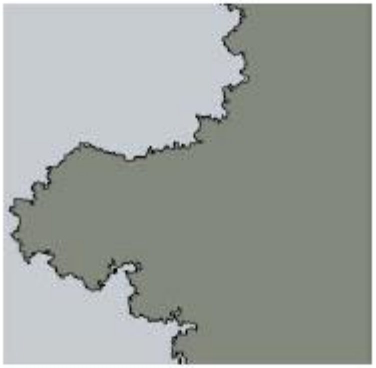
Fractal Definition

Fractals are typically self similar patterns, where self-similar means they are "the same from near as from far… Fractals may be exactly the same at every scale.

Fractal in nature means that the market makes same/similar movements on all time frames. These recurring patterns might seem ad random, but actually have an order to them, which can be explained by the Elliott Wave Theory. In that regard chaos has order in it on a higher scale.

کاربرد فرکتال

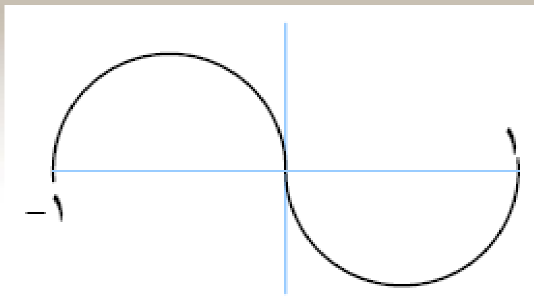
- اندازه خط ساحلی زیر چقدر است؟



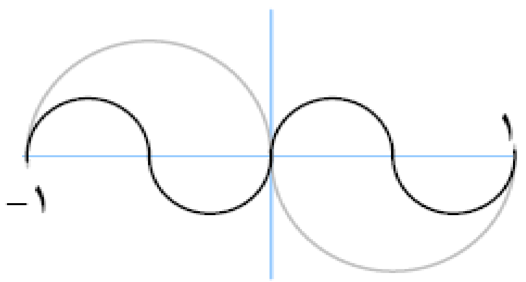
- خطکش چقدر دقت داشته باشد که بتوانیم دقیق اندازه بگیریم.
- آیا اندازه گیری با خطکش درست است؟ قطعیت دارد؟

پارادکس: (Yin Yang)
چقدر به اندازه‌گیری خودمان مطمئنیم؟

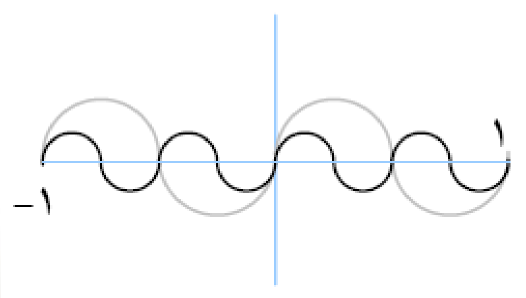
- مثالی از عدم قطعی بودن علم ما حتی در این مثال ساده:
- طول خط منحنی در منحنی‌های زیر چقدر است؟



$$۲\pi \times \frac{۱}{۲} = \pi$$



$$۲ \times ۲\pi \times \frac{۱}{٤} = \pi$$



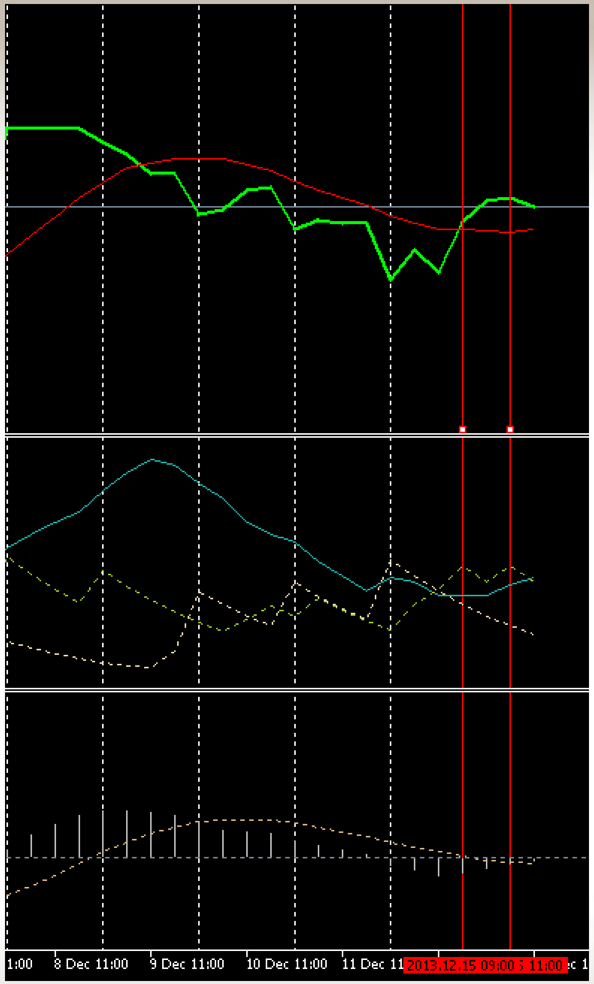
$$\pi$$

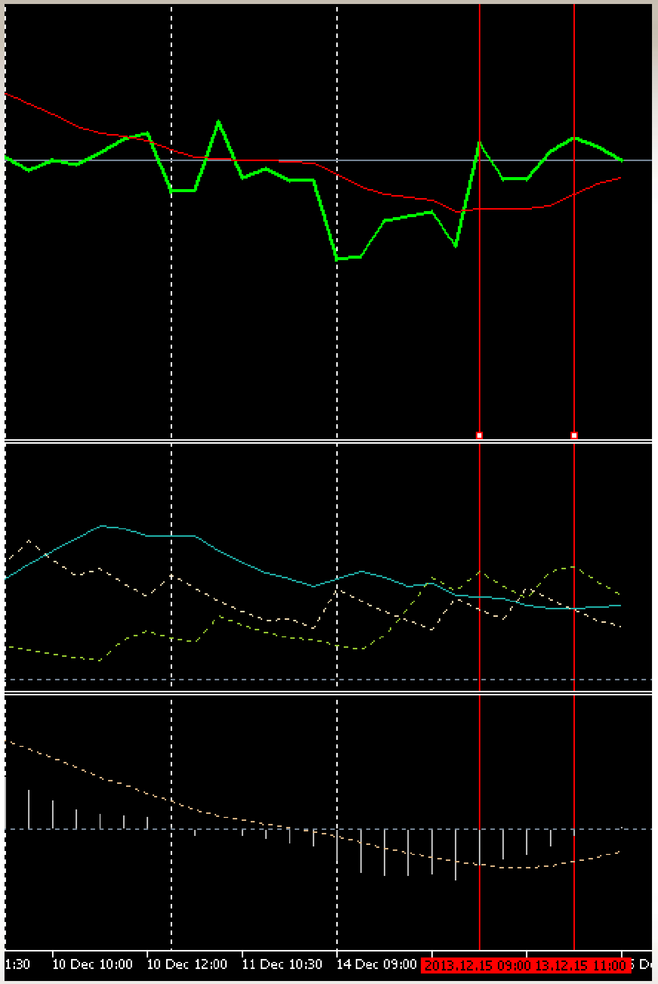
- در بی نهایت منحنی خط می‌شود
  یعنی مساوی π
- پس آیا:

$$\pi \overset{?}{=} ۲$$

فرکتال در بورس اوراق بهادار:

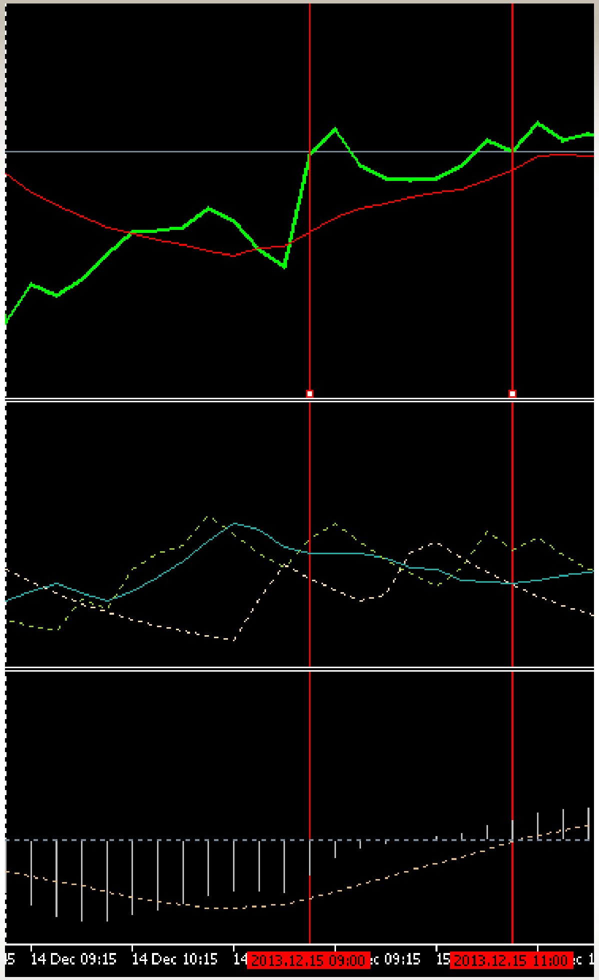
نگرش ۶۰ و ۳۰ دقیقه





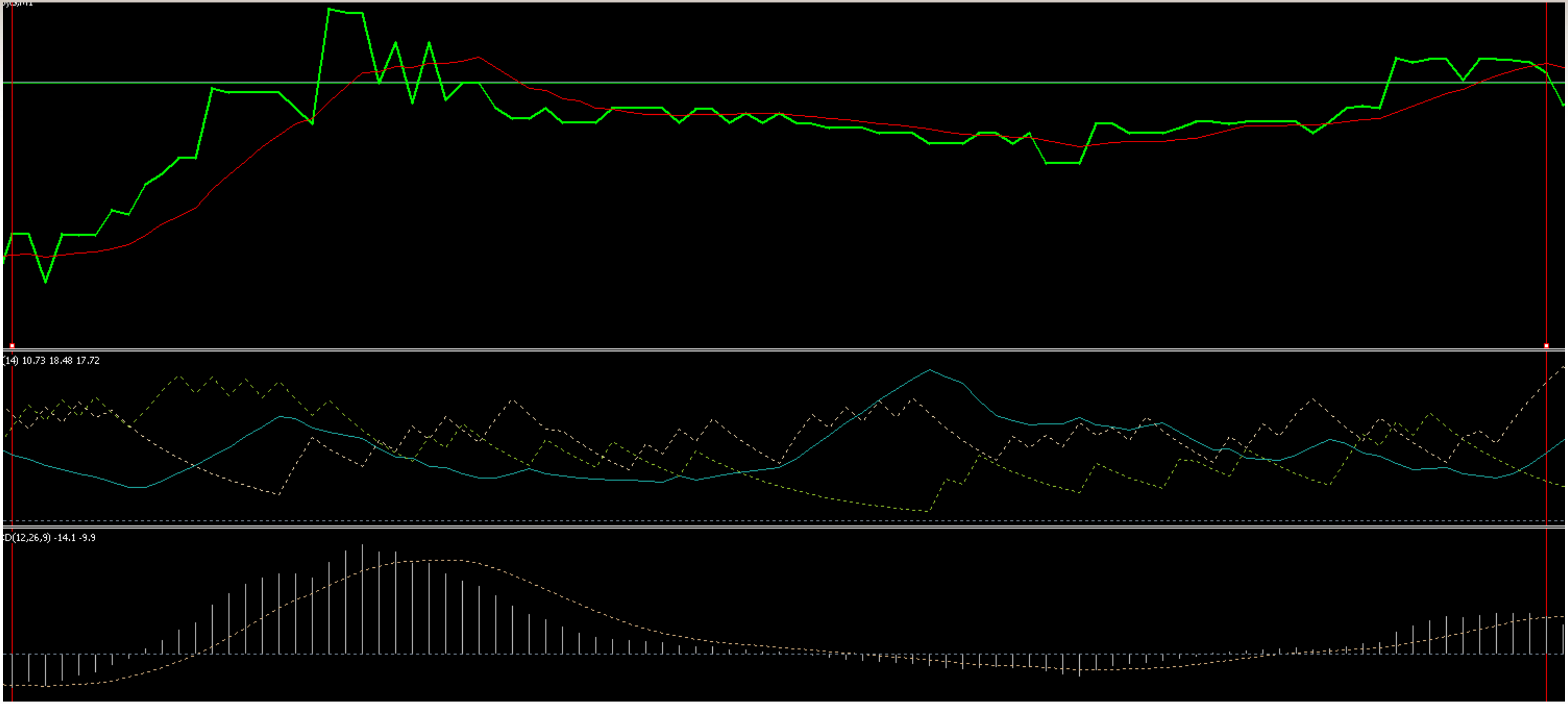
فرکتال در بورس اوراق بهادار:

نگرش با پنجره ۱۵ و ۵ دقیقه



فرکتال در بورس اوراق بهادار:

نگرش با پنجره ۱ دقیقه

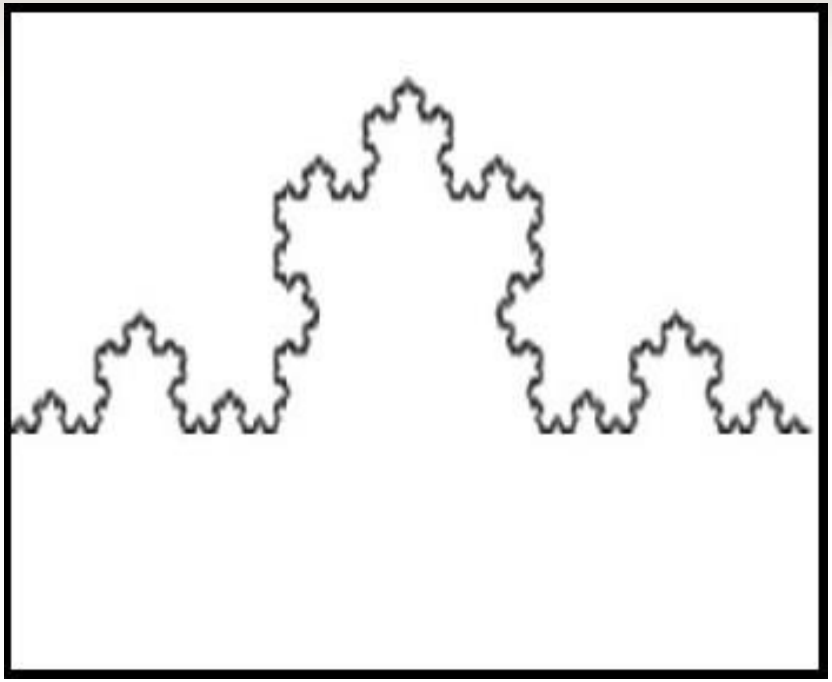


بعد فرکتال از دیدگاه ریاضی

- معیار عددی جهت اندازه گیری فضای اشغال شده توسط یک الگو
- انواع الگوهای انتزاعی و واقعی
  - ❖ پدیده های آشوب گون
  - ❖ رشد شهری
  - ❖ نقشه ها
  - ❖ اشکال فرکتال
  - ❖ سیگنالها
  - ❖ مولدهای تصادفی

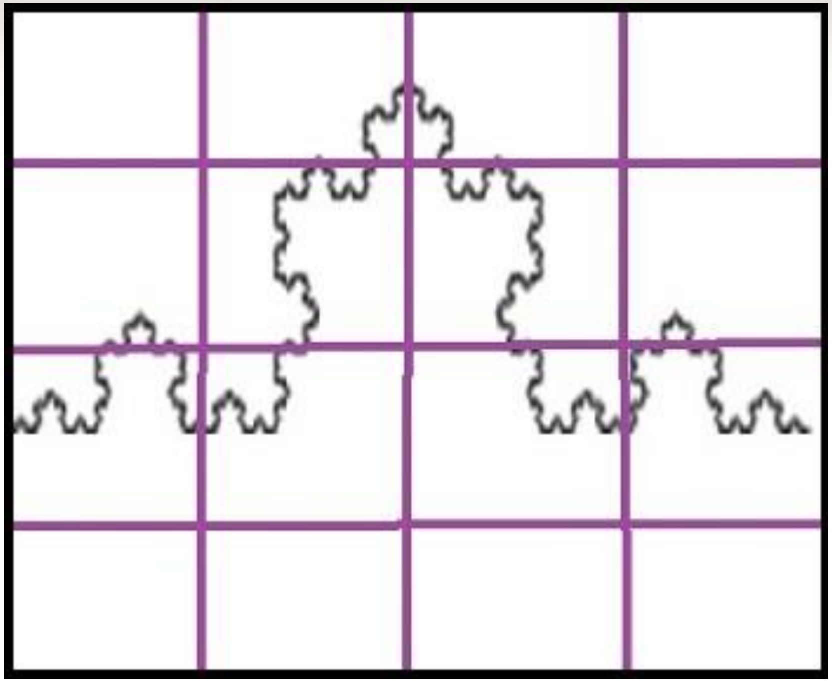
محاسبه بعد فرکتال با شمارش مشبک‌ها

۱. انتخاب طول مشبک



$L = 4$

محاسبه بعد فرکتال

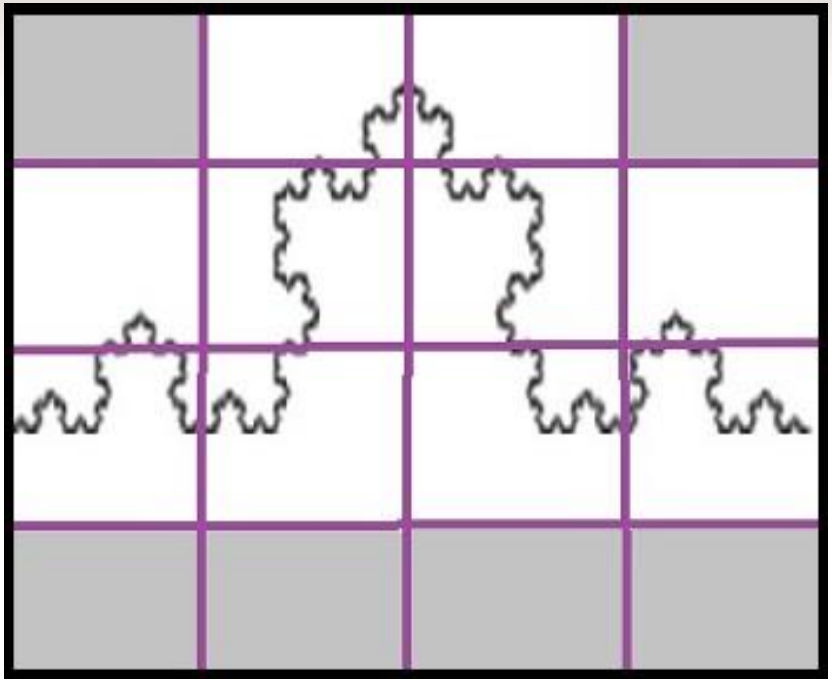


$L = 4$

The Von Koch Curve

۱. انتخاب طول مشبک
۲. تقسیم بندی الگو

محاسبه بعد فرکتال



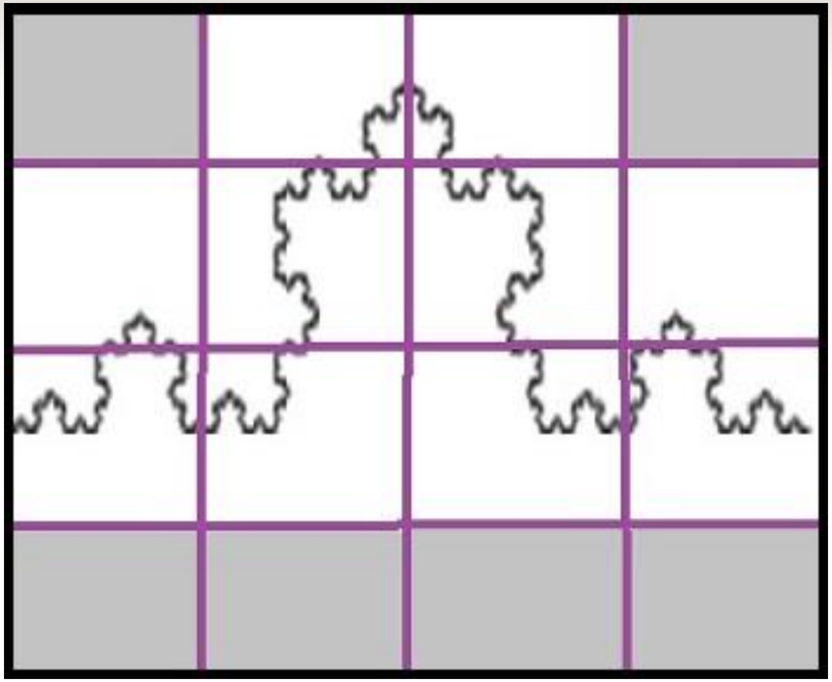
$L = 4 \ , N = 10$

۱. انتخاب طول مشبک
۲. تقسیم بندی الگو
۳. شمارش خانه های پر

The Von Koch Curve

محاسبه بعد فرکتال

۱. انتخاب طول مشبک
۲. تقسیم بندی الگو
۳. شمارش خانه های پر
۴. محاسبه بعد فرکتال



$L = 4 , N = 10$

$$dim = \frac{\log N}{\log L} = \frac{\log 10}{\log 4} = 1.6610$$

The Von Koch Curve

محاسبه بعد فرکتال به روش شمارش مشبک‌ها

- روش Box Counting

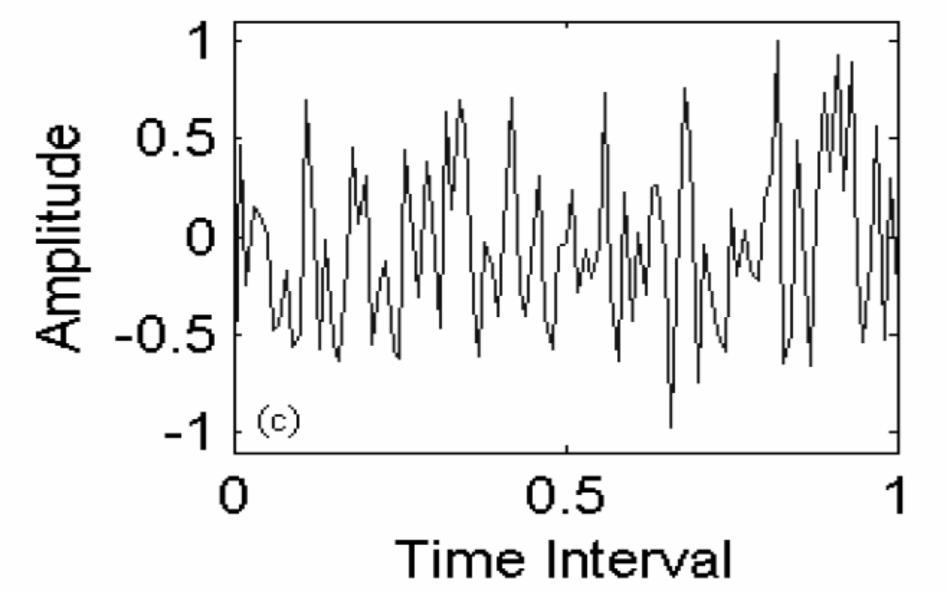
$$dim_{box}(S) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}$$

- خصوصیات روش
    - ❖ الگوریتم ساده
    - ❖ دقت بیشتر با انتخاب مشبک ریزتر
    - ❖ قابلیت استفاده در بعدهای بالاتر

Mandelbrot BB. The fractal geometry of nature. Freeman, New York, 1983.
Barnsley M F. Fractals Everywhere, 2nd ed, New York: Academic Press Professional; 1993.

کاربرد بعد فرکتال

- پردازش سیگنالها
  - ❖ زمان
  - ❖ مکان



B. S. Raghavendra, and D. Narayana Dutt. . Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Metho : World Academy of Science, Engineering and Technology 37 2010

مولد اعداد تصادفی

- کاربردها
  - ❖ شبیه سازی کامپیوتری
  - ❖ شبیه سازی مونت‌کارلو
  - ❖ حل مسایل بهینه‌سازی با روش‌های اکتشافی
  - ❖ رمزنگاری اطلاعات
- معیارهای سنجش یک مولد
  - ❖ تنوع تولید اعداد
  - ❖ یکنواختی
  - ❖ استقلال
  - ❖ دوره تناوب
  - ❖ سرعت تولید

مولد اعداد تصادفی

- آزمونهای مهم مولد اعداد تصادفی

❖ آنتروپی (تنوع تولید)

❖ آزمون همبستگی و خود همبستگی (استقلال داده‌ها)

❖ آزمون مربع کای (عدالت سنجی–یکنواختی تولید)

❖ آزمون کولموگروف – سمیرنوف (یکنواختی تولید)

❖ آزمون شباهت سنجی (استقلال داده‌ها)

❖ **آزمون بعد فرکتال (استقلال و یکنواختی را تواما تست می‌کند) – (چگونه؟)**

دلایل استفاده از آزمون بعد فرکتال

- آزمونهای رایج، هر کدام یک معیار را بررسی می کنند.
- آزمون رایج، روی بعد یک و نهایتا بعد دو اعمال می شوند.
- مشخص شدن بعضی از خصوصیات مولدها در ابعاد بالاتر
- یک سئوال: یک مولد خوب دارای بعد بینهایت می باشد (یعنی چه؟)
- سنجش دقیق‌تر رفتار مولدها

آزمون بعد فرکتال

- تولید نمودار فاز برای بعد های یک، دو، سه و …
- بعد اول
- بعد دوم
- بعد سوم

$$\dim = 1\ , R = \{\, r_{0,} r_{1,} r_{2,} r_{3,} \dots \}$$

$$dim = 2\ , R^2 = \{(r_0, r_1), (r_2, r_3), (r_4, r_5), \dots\}$$

$$dim = 3\ , R^3 = \{(r_0, r_1, r_2), (r_3, r_4, r_5), (r_6, r_7, r_8), \dots\}$$

- محاسبه بعد فرکتال با روش شمارش مشبک Box Counting

آزمون بعد فرکتال

$$X_n = 3X_{n-1} + 1 \; mod \; 16$$

1,4,13,8,9,12,5,0, 1,4,13,8,9,12,5,0…

- محاسبه بعد دوم

(1,4),(4,13),(13,8),(8,9),(9,12),(12,5),(5,0), (0,1),…

- زوجهای بدست آمده نقاطی در فضای دو بعدی می باشند.

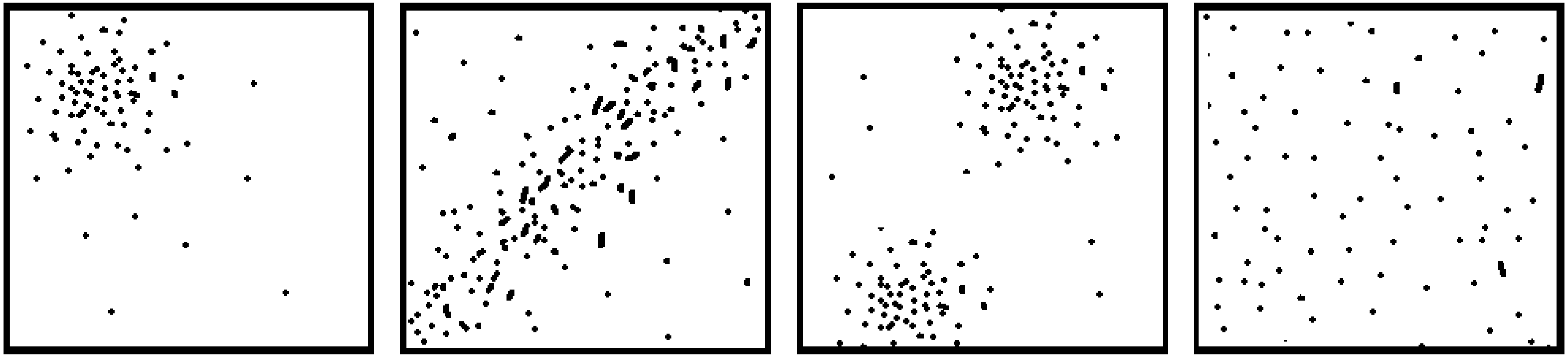
پیچیدگی مکانی روش شمارش مشبک‌ها

- این روش دارای پیچیدگی مکانی از مرتبه $o(\mathrm{N}^{dim})$ می باشد

	N = 128 مولد ۷ بیتی	N = 256 مولد ۸ بیتی	65536 = N مولد 16 بیتی
Dim = 1	۱۲۸	۲۵۶	۶۵۵۳۶
Dim = 2	16384	65536	512 MB
Dim = 3	2097152	128 MB	<u>32768 GB</u>
Dim = 5	<u>4 GB</u>	<u>۱۲۸ TB</u>	<u>1 T * TBit</u>

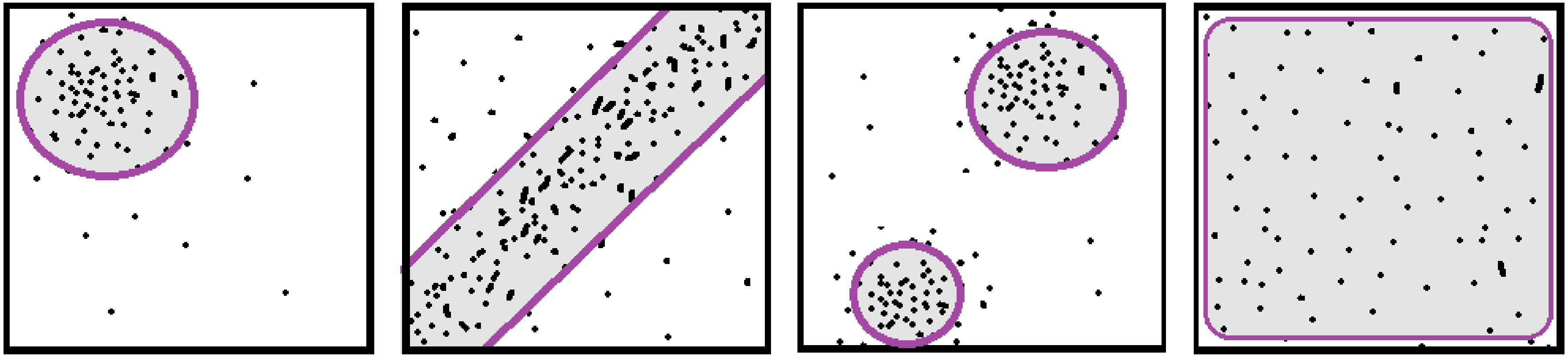
ارائه راهکار

- استفاده از روشهای آماری جهت تخمین نقاط یک بلاک
  - ❖ میانگین، انحراف معیار، ضریب همبستگی



ارائه راهکار

- استفاده از روشهای آماری جهت تخمین نقاط یک بلاک
  - ❖ میانگین، انحراف معیار، ضریب همبستگی



روش ارائه شده

۱. تقسیم بندی الگو با انتخاب طول مشبک
۲. ذخیره تعداد نقاط داخل هر بلاک
۳. محاسبه میانگین، انحراف معیار، ضریب همبستگی
۴. تعیین مناطق چگال و تخمین تعداد نقاط واقع در آن

$$E(X,n,c) = \frac{t^c - 1}{t - 1}, t = \frac{n-1}{n}$$

۵. جمع تخمین تمامی بلاک‌ها
۶. محاسبه بعد فرکتال

تخمین تعداد نقاط پر شده در یک منطقه چگال

مسئله : اگر در یک فضا c دفعه به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت، نقاط دلخواهی انتخاب گردد چند نقطه انتخاب شده متمایز خواهند بود؟

فرضیات مسئله:

n : تعداد کل نقاط فضا

c: تعداد دفعات انتخاب نقاط در فضای مورد نظر

p : احتمال اینکه یک نقطه دلخواه انتخاب گردد.

X : متغیر تصادفی که تعداد نقاط متمایز انتخاب شده را می شمارد.

هدف مسئله:

$$E(X,n,c) = ?$$

تخمین تعداد نقاط پر شده در یک منطقه چگال

طبق فرض مسئله داریم:

$$p = \frac{1}{n}$$

اگر یک بار عمل انتخاب انجام گیرد، تعداد نقاط متمایزی که انتخاب شده ۱می باشد:

$$E(X, n, 1) = 1$$

فرض کنیم i دفعه انتخاب نقاط انجام شود و مقدار امید مورد انتظار برابر k باشد؛ یعنی بعد از i دفعه k نقطه متمایز انتخاب گردد:

$$E(X, n, i) = k$$

اکنون می خواهیم یک نقطه جدید به صورت تصادفی انتخاب کنیم دو حالت وجود دارد

۱. نقطه جدید قبلا انتخاب شده باشد. (k انتخاب وجود دارد)
۲. نقطه جدید قبلا انتخاب نشده باشد. (n-k انتخاب وجود دارد)

تخمین تعداد نقاط پر شده در یک منطقه چگال

در حالت اول تعداد نقاط مختلف که تاکنون انتخاب شده تغییر نمی‌کند و در حالت دوم یکی اضافه می‌گردد زیرا یک نقطه جدید انتخاب شده است. در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
E(X,n,i+1) &= kpk + (n-k)p(k+1) \\
&= kpk + (npk + np - kpk - kp) \\
&= npk + np - kp = k(np-p) + np
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X,n,i+1) &= kp(n-1) + np = k\frac{1}{n}(n-1) + \frac{1}{n}n \\
&= k\frac{n-1}{n} + 1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)k + 1 \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)E(X,n,i) + 1
\end{aligned}
$$

تخمین تعداد نقاط پر شده در یک منطقه چگال

با فرض

$$t = \frac{n-1}{n}$$

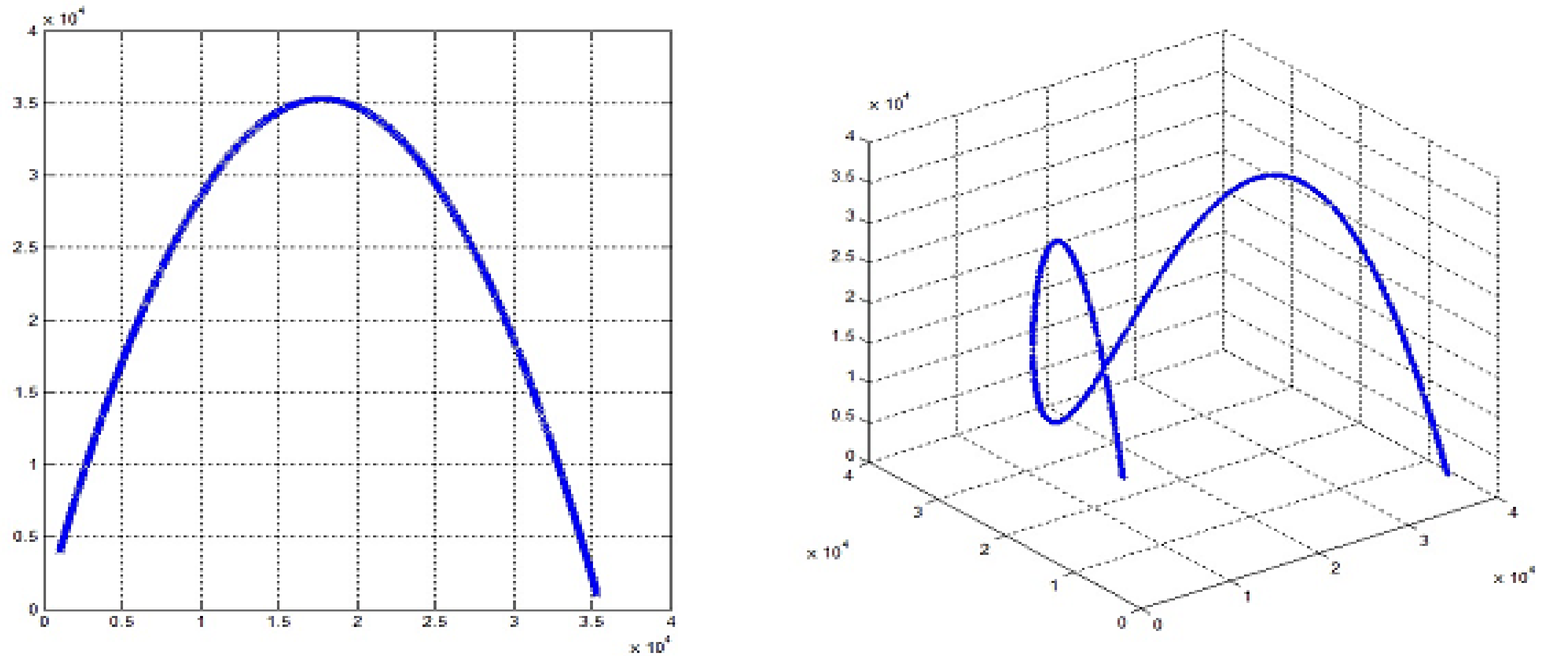
به رابطه بازگشتی میرسیم:

$$E(X,n,i+1) = tE(X,n,i) + 1$$

از حل رابطه بازگشتی به روش جایگذاری داریم:

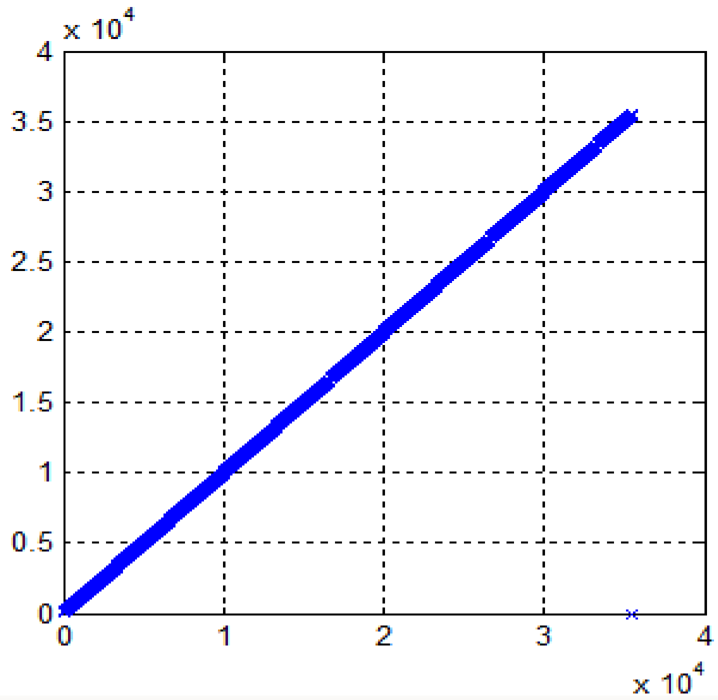
$$E(X,n,c) = \frac{t^c - 1}{t - 1} = \frac{(\frac{n-1}{n})^c - 1}{(\frac{n-1}{n}) - 1}$$

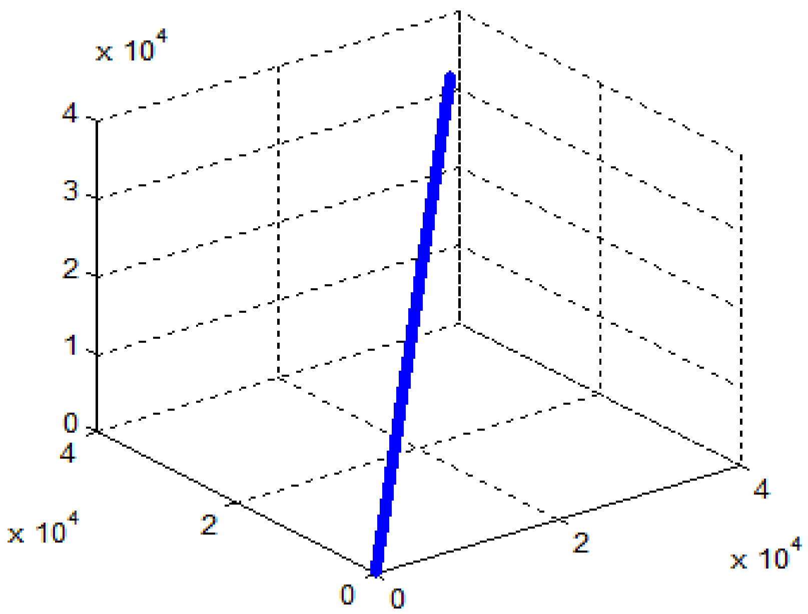
مولد آشوبگون



$$x_{n+1} = r\,x_n\,(1 - x_n)\,, \qquad x_0 = 0.3, \qquad r = 3.953$$

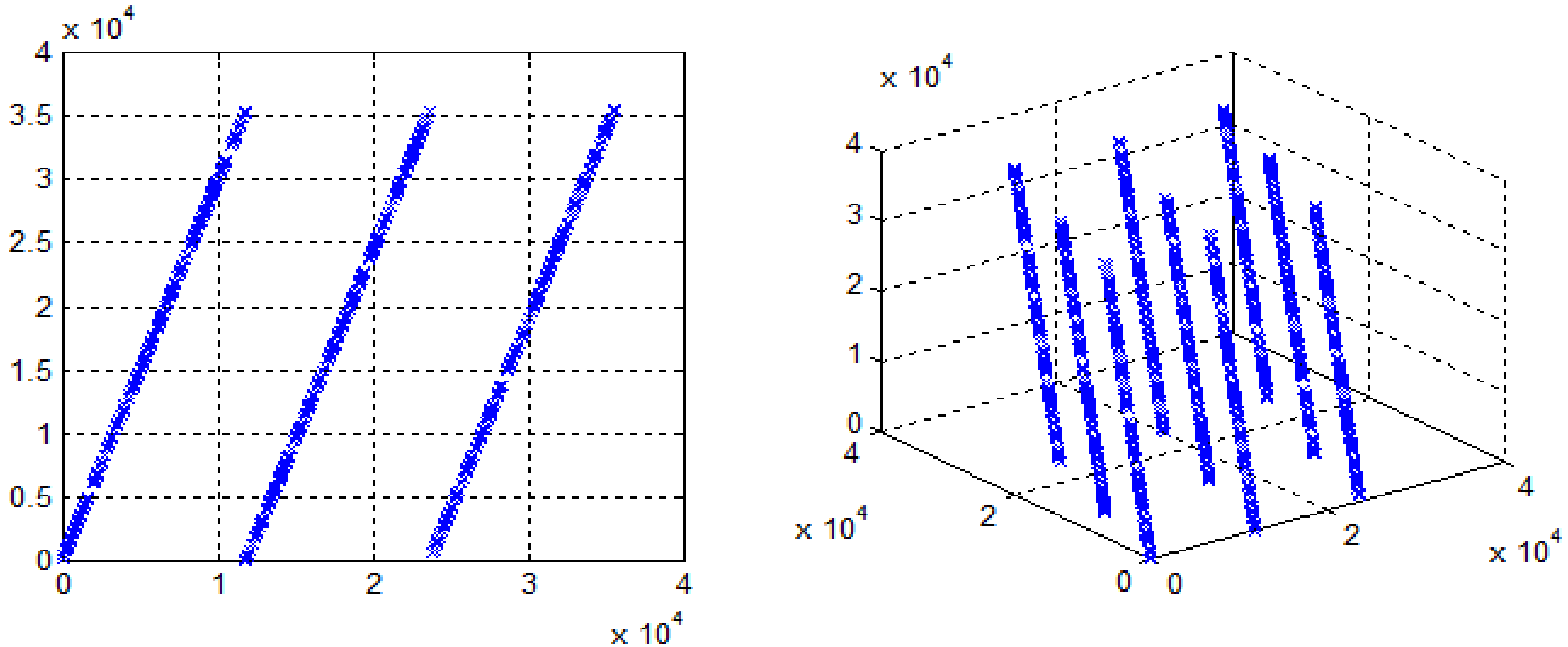
مولد ساده همنهشتی





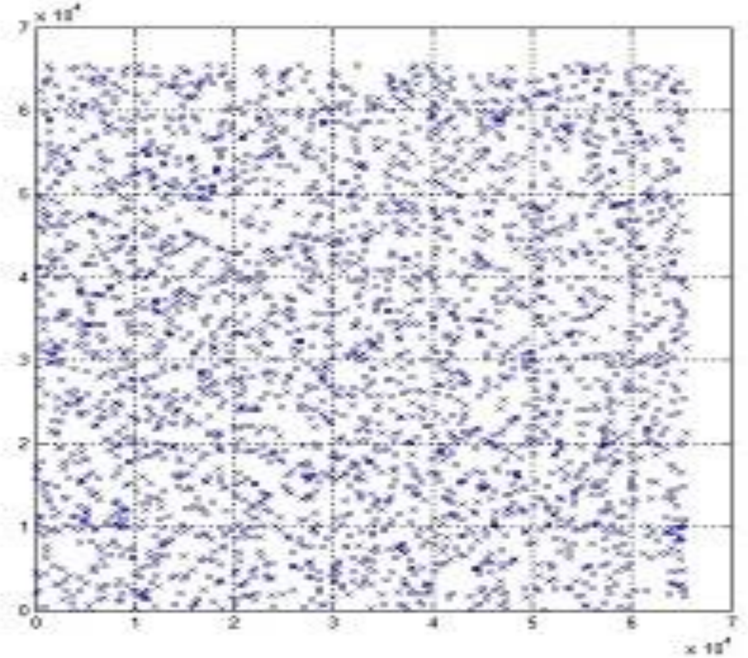
$$x_{n+1} = (x_n + 1)\ mod\ 2^{16}$$

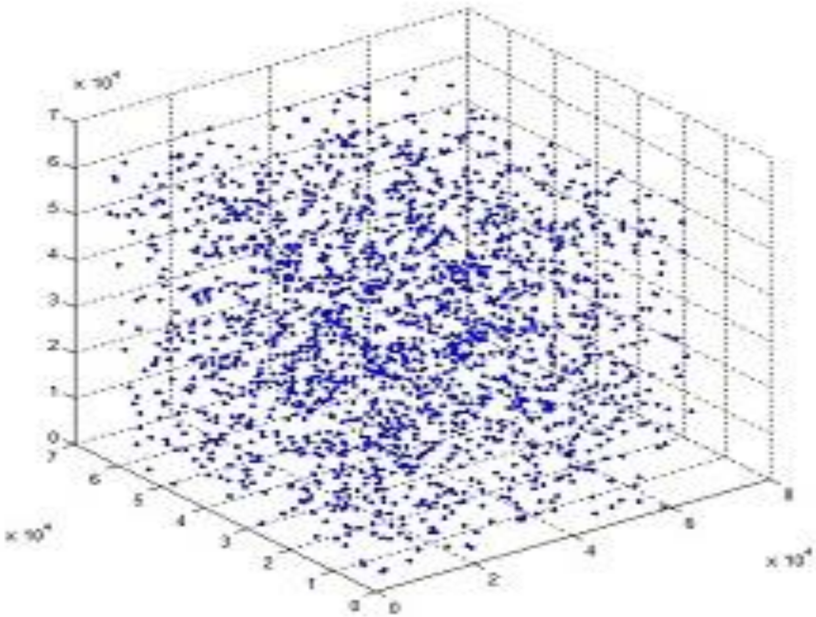
مولد همنهشتی مضارب ۳



$$x_{n+1} = (3 * x_n + 1)\ mod\ 2^{16}$$

مولد تصادفی همنهشتی ۳۲ بیتی

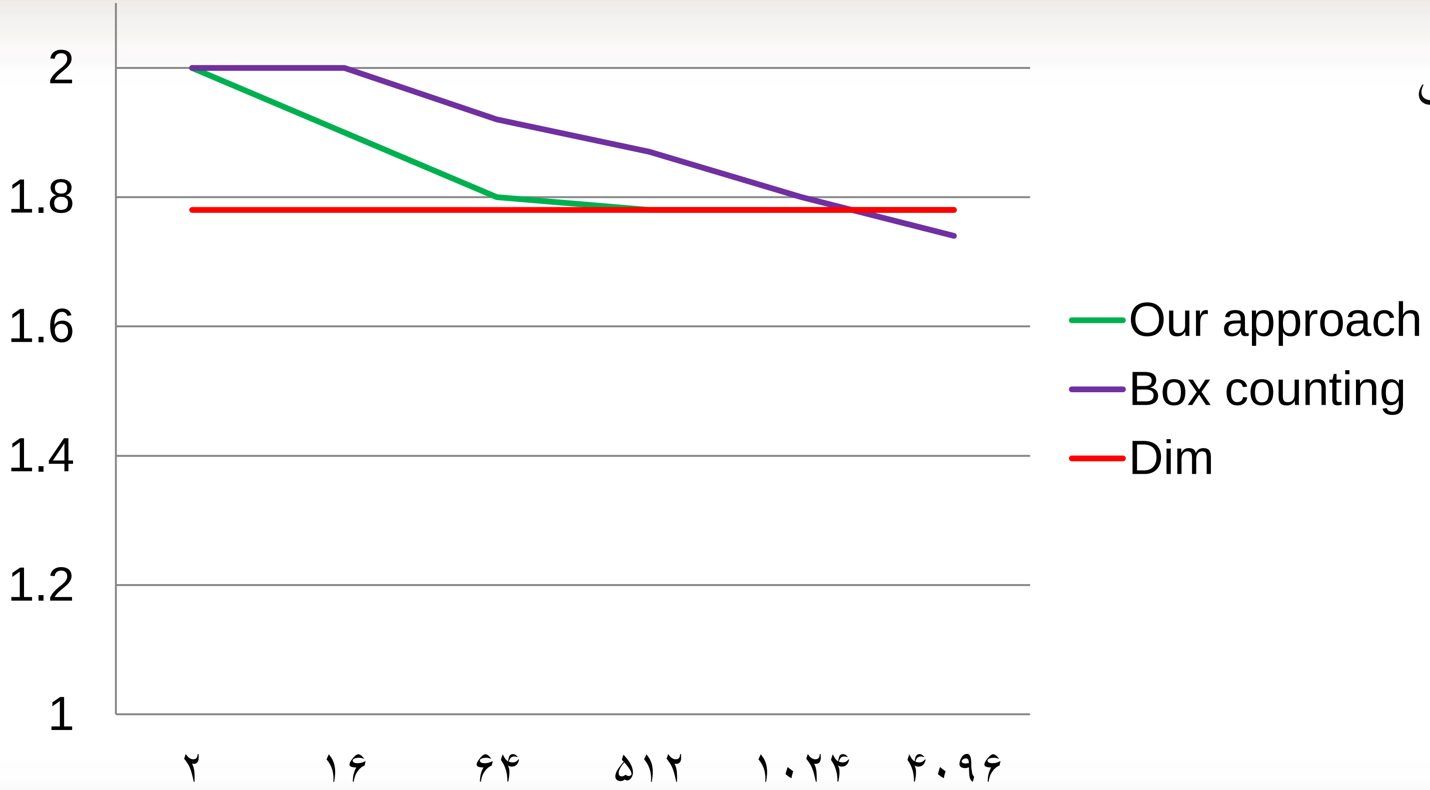




$$x_{n+1} = (214013 * x_n + 2531011) \; mod \; 2^{32}$$

ارزیابی روش جدید برای بعد دو

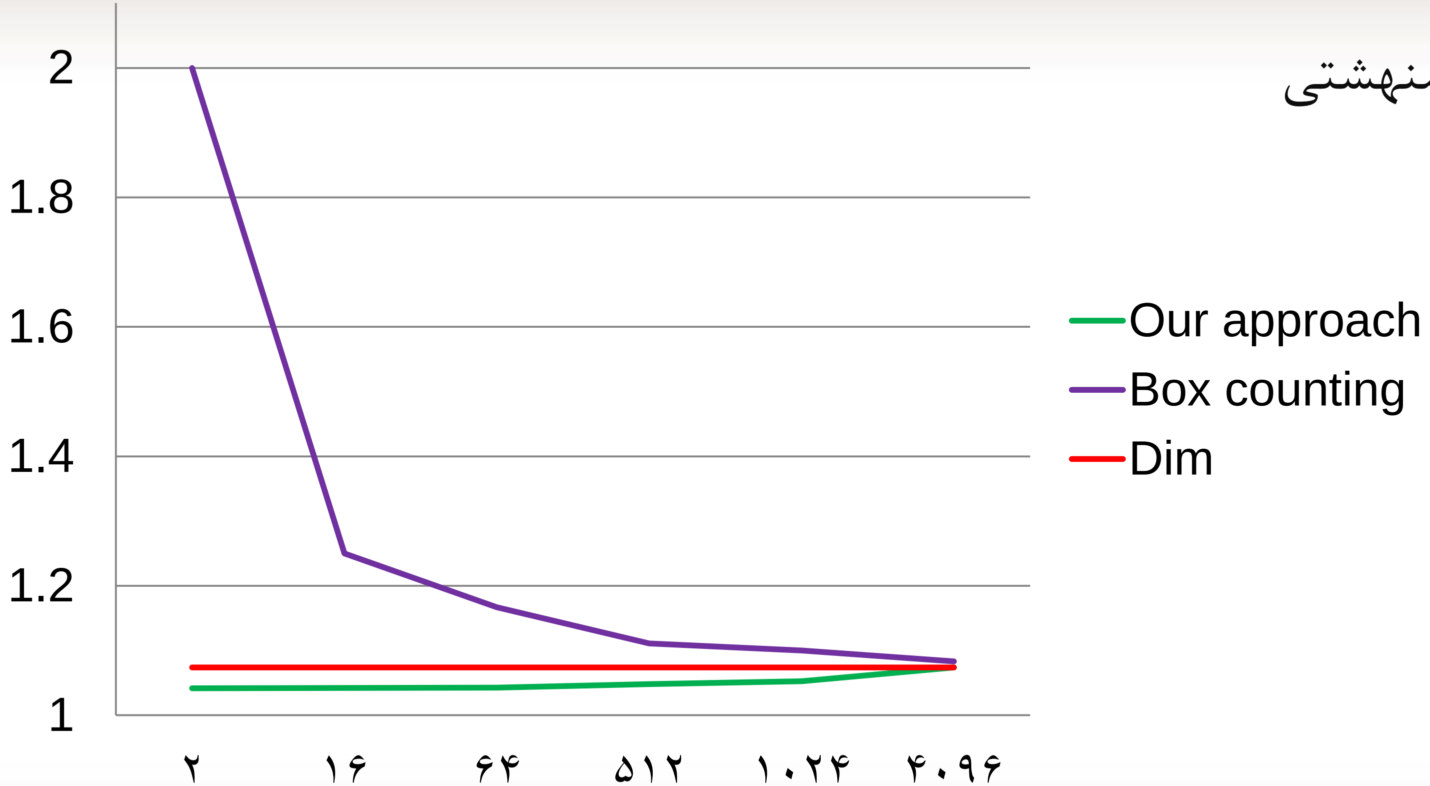
- مولد آشوبگون



$$x_{n+1} = r\, x_n\,(1 - x_n\,)\,, \qquad x_0 = 0.3, \qquad r = 3.953$$

ارزیابی روش جدید برای بعد دو

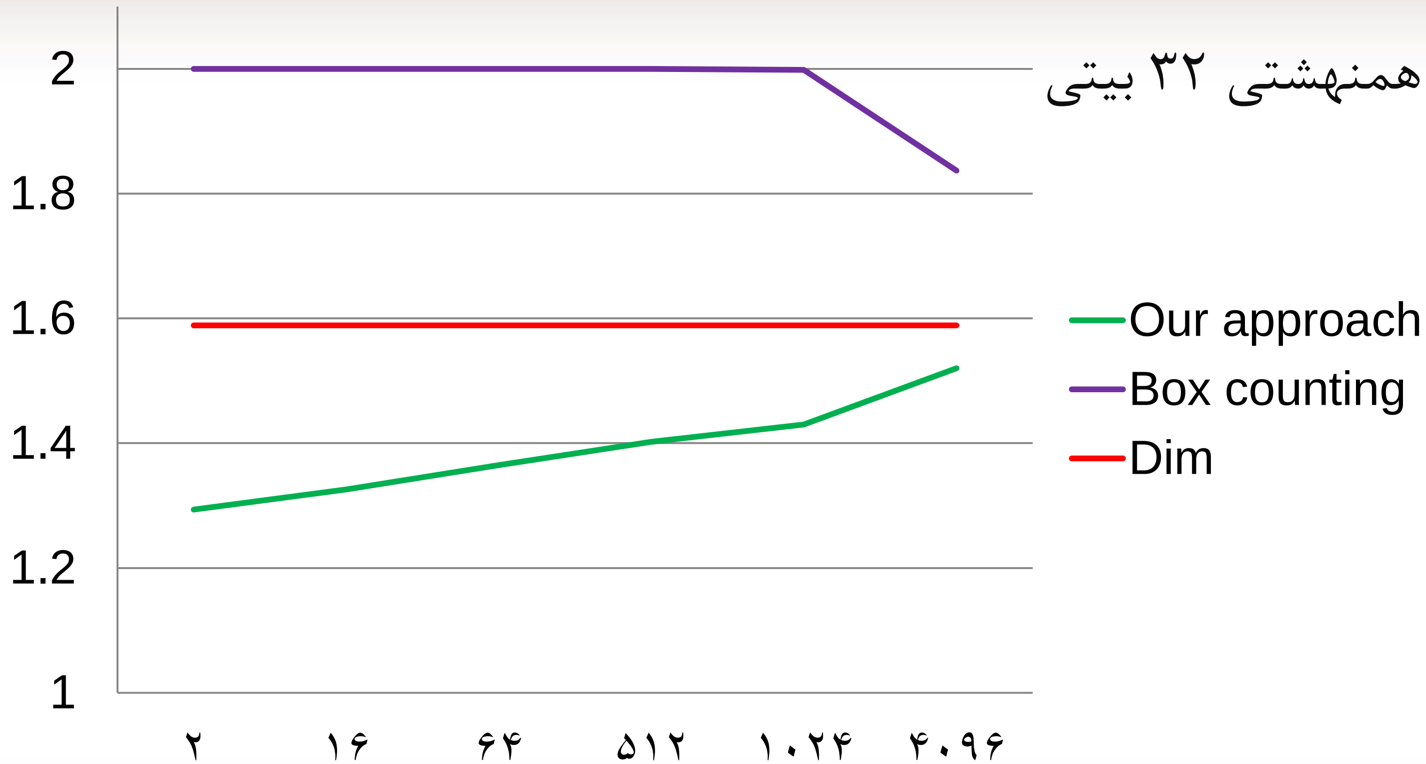
- مولد ساده همنهشتی



$$x_{n+1} = (x_n + 1)\ mod\ 2^{16}$$

ارزیابی روش جدید برای بعد دو

- مولد تصادفی همنهشتی ۳۲ بیتی



$$x_{n+1} = (3 * x_n + 1) \ mod \ 2^{16}$$

نتیجه‌گیری

ارزیابی ها، نشان از دقت روش جدید می دهند.

مشبک دو در بعد دو، نتایج قابل قبولی می‌دهد.

کاهش پیچیده‌گی زمانی الگوریتم به صورت غیر مستقیم

؟